Муниципальное казённое общеобразовательное учреждение

Черемшанская средняя общеобразовательная школа №20

ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКАЯ РАБОТА

НА ТЕМУ

«Использование теоремы Менелая, теоремы Чевы и леммы о трезубце для решения 13 и 16 задания профильного ЕГЭ по математике»

Выполнил:

Чесноков Руслан Алексеевич

ученик 10-го класса

МКОУ СОШ №20

Руководитель проекта:

Шуманский Сергей Владимирович

(учитель математики)

с. Черемшанка

2023

Введение

Профильный экзамен по математике — один из наиболее сложных экзаменов. Из заданий второй части традиционно непростыми для решения являются задания по геометрии (это 13 и 16 задания). За их решение берутся единицы. В городах есть много возможностей для тех, кто хочет сдать профильный экзамен по математике на высокие баллы, но в условиях сельской местности чаще всего преподается базовый курс математики, на него выделяется небольшое количество часов, и для того, чтобы сдать, нужно приложить больше усилий.

Считается, что профильный экзамен по математике возможно решить, обладая базовыми знаниями предмета. Вероятно, это так, но есть предположение, что некоторые дополнительные знания, которые в условиях сельской школы либо оставляют без внимания, либо, в лучшем случае, проходят на факультативных занятиях, могут помочь получить более высокий балл в условиях жесткой нехватки времени на ЕГЭ профильного уровня. Например, такими материалами являются теорема Чевы, теорема Менелая и лемма о трезубце. Таким образом, эта работа будет полезна для тех, кто сдает профильный экзамен по математике.

Цель: создание мини-пособия для сдающих профильный ЕГЭ по математике по решению 13 и 16 заданий при помощи теоремы Менелая, теоремы Чевы и леммы о трезубце.

Актуальность: теорема Менелая, теорема Чевы и лемма о трезубце изучаются лишь в факультативных математических курсах, но они дают возможность проще решить некоторые прототипы заданий 13 и 16 ЕГЭ по математике. Поэтому наша работа будет интересна для тех, кто готовится сдавать математику профильного уровня.

Гипотеза: при помощи вышеупомянутых теорем определённые прототипы заданий 13 и 16 ЕГЭ по математике профильного уровня решать легче, чем иными способами.

Задачи:

1) Изучить теорему Менелая, теорему Чевы и лемму о трезубце и рассмотреть их доказательство.
2) Рассмотреть решения прототипов заданий 13 и 16 ЕГЭ по математике профильного уровня традиционным способом и при помощи указанных теорем.
3) Произвести сравнительный анализ решений 13 и 16 заданий ЕГЭ различными способами и сделать вывод о необходимости применения теоремы Чевы, теоремы Менелая и леммы о трезубце для выполнения этих заданий.
4) Проверить теоретические выводы на практике через самостоятельную работу учащихся, сдающих профильный ЕГЭ.
5) Составить мини-пособие по применению теоремы Чевы, теоремы Менелая, леммы о трезубце для решения 16 заданий профильного ЕГЭ.

В качестве **предмета исследования** выступают, таким образом, способы и результаты решения заданий 13 и 16 профильного ЕГЭ по математике с точки зрения их временных затрат.

Объект исследования – тексты КИМ ЕГЭ, кодификатор ЕГЭ по математике профильного уровня, работы учеников с решениями прототипов 13 и 16 заданий, выполненные разными способами.

Методы исследования: поисковый, наблюдение, анализ, эксперимент, сравнение, систематизация, синтез (обобщение).

Глава I. Теоремы и их доказательства

Рассмотрим вышеуказанные теоремы и их доказательства.

1. Теорема Менелая

Теорема Менелая показывает соотношение сторон треугольника, которое получается, когда прямая пересекает две стороны треугольника и продолжение третьей.

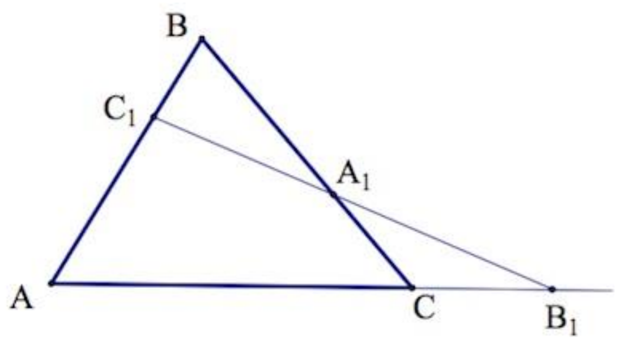
С помощью этой теоремы можно получить соотношения сторон треугольника и доказать коллинеарность точек, которые находятся на данном треугольнике (на двух сторонах и продолжении третьей).

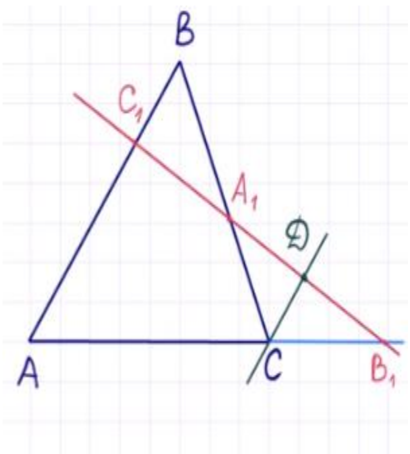
Коллинеарными точками называются три или более точки, которые лежат на одной прямой.

Теорема:

Если точки A_1, B_1 и C_1 лежат соответственно на прямых BC, CA и AB треугольника или на их продолжениях, то они лежат на одной прямой, тогда и только тогда, когда

$$\frac{AC1}{C1B} * \frac{BA1}{A1C} * \frac{CB1}{B1A} = 1$$





Доказательство теоремы Менелая: для доказательства теоремы Менелая проведём через точку C прямую, параллельную AB, таким образом:

Обозначим точку пересечения данной прямой с B_1C_1 через точку D. В таком случае мы получим несколько пар подобных треугольников. Сторона CD параллельна AB. Тогда первой парой подобных треугольников будут треугольники B_1CD и B_1AC_1. Они подобны по второму признаку подобия треугольников, то есть по двум пропорциональным сторонам и углу B_1 между ними. Углы B_1CD и B_1AC_1 равны как соответственные при параллельных прямых CD, AB и секущей AC. Анализируя данную пару подобных треугольников, можно записать условие пропорциональности сходственных сторон, а именно:

$$\frac{CB1}{B1A} = \frac{CD}{AC1}$$

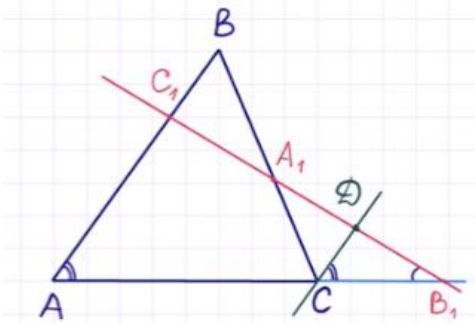
Так как сторона CD не является составляющей исходного равенства, для дальнейшего доказательства её нужно выразить. Используя описанное равенства, применив свойства пропорции, запишем:

$$CD = \frac{(AC1 * CB1)}{B1A}$$

Запишем следующую пару подобных треугольников: треугольники CDA_1 и BC_1A_1 подобны, так как углы CA_1D и BA_1C_1 равны как вертикальные. Кроме этого, угол CDA_1 равен углу BC_1A_1, как накрест лежащие при параллельных прямых CD, AB и секущей C_1D. Покажем это на рисунке:

Из данного подобия можно записать некоторую пропорциональность сходственных сторон:

$$\frac{CD}{C1B} = \frac{A1C}{BA1}$$



Так же выразим CD:

$$CD = \frac{A1C*C1B}{BA1}$$

Осталось лишь приравнять дроби, с помощью которых мы выразили CD – равны. Таким образом получаем:

$$\frac{(AC1 * CB1)}{B1A} = \frac{A1C * C1B}{BA1}$$

Умножив обе дроби на часть, обратную левой дроби, мы получили исходное равенство:

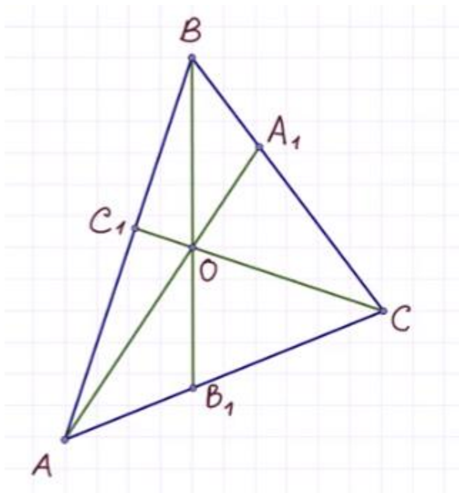
$$\frac{AC1}{C1B} * \frac{BA1}{A1C} * \frac{CB1}{B1A}$$

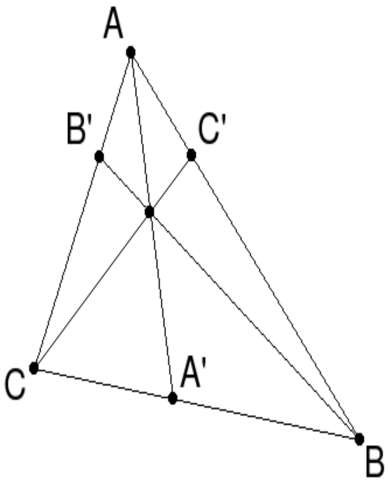
Что и требовалось доказать.

2. Теорема Чевы

Теорема:Любые произвольные отрезки, выходящие из вершин треугольника, но с одним условием: они должны пересекаться в одной точке, делят противолежащие этим вершинам стороны таким образом, что истинно равенство:

$$\frac{AC1}{C1B} * \frac{BA1}{A1C} * \frac{CB1}{B1A} = 1$$





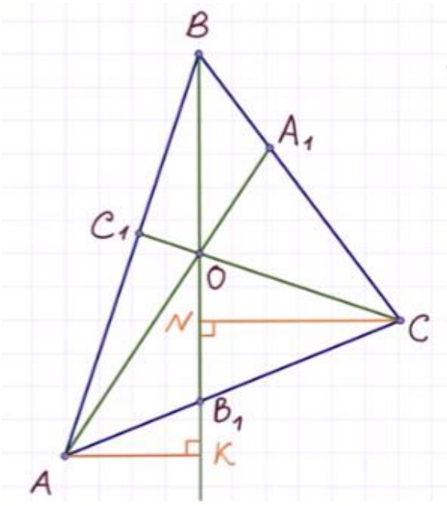
Доказательство теоремы Чевы:

Рассмотрим рисунок:

Итак, мы имеем треугольник ABC и произвольные чевианы AA_1 и BB_1. Третья чевиана CC_1 обязательно должна проходить через точку пересечения первых двух. При этом получается, что:

$$\frac{AC1}{C1B} * \frac{BA1}{A1C} * \frac{CB1}{B1A} = 1$$

Обозначим за O точку пересечения данных прямых. Продлим медиану BB_1. Проведём перпендикуляры из вершин A и C таким образом:



Запишем соотношение:

$$\frac{SAOB}{SBOC} = \frac{AK}{CN} = \frac{AB1}{B1C}$$

Треугольники AKB_1 и CNB_1 подобны по острому углу. Аналогично получаем:

$$\frac{SAOC}{SBOC} = \frac{AC1}{C1B} \quad \text{и} \quad \frac{SBOA}{SAOC} = \frac{BA1}{A1C}$$

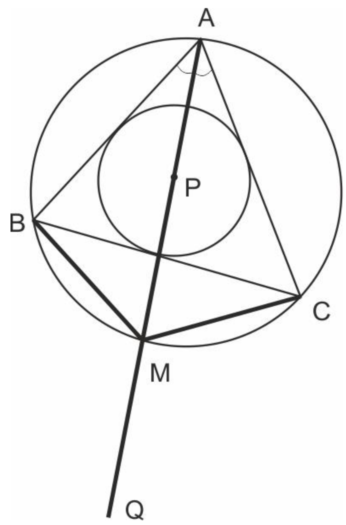
Теперь перемножим равенства:

$$\frac{SAOC}{SBOC} x \frac{SBOA}{SAOC} x \frac{SAOB}{SBOC} = 1,$$

Что и требовалось доказать

3. Лемма о трезубце

Лемма: Пусть P – центр вписанной окружности треугольника ABC, Q – центр его вневписанной окружности, касающейся стороны BC. Точка пересечения биссектрисы угла A треугольника ABC с его описанной окружностью равноудалена от точек B, C, P, Q. Эта схема называется также теоремой о трилистнике.



Доказательство леммы о трезубце:

Дан треугольник ABC, AM – биссектриса угла A, P – центр вписанной окружности треугольника ABC, Q – центр его вневписанной окружности (которая касается стороны BC и продолжений сторон AB и AC), M – точка пересечения биссектрисы угла A и описанной окружности треугольника ABC. Докажем, что MP = MB = MC.

На рисунке виден «трезубец» (или «трилистник»), состоящий из отрезков MP, MB, MC, MQ.

Докажем сначала, что MB = MC = MP.

Вписанные углы BAM и BCM опираются на дугу BM, следовательно, они равны.

Аналогично, вписанные углы CAM и CBM опираются на дугу CM, и они тоже равны.

Угол BAM = углу CAM, поскольку AM – биссектриса угла BAC.

Следовательно, угол BCM = углу BAM= углу CAM = углу CBM= α и треугольник BMC – равнобедренный, BM = CM.

Точка P – центр вписанной окружности треугольника ABC. Значит, P – точка пересечения биссектрис треугольника ABC, и тогда BP и CP – биссектрисы его углов ABC и ACB соответственно.

Пусть угол BAC=2α, угол ABC=2β, угол ACB=2γ

Сумма углов треугольника ABC равна 180^0, значит, $2\alpha +2\beta+2\gamma=180^0$

В треугольнике BMP:

угол PMB= углу ACB=2γ, угол PBM=$\alpha+\beta$.

Тогда угол BPM=$\alpha+\beta$ = углу PBM, треугольник BMP равнобедренный, BM = PM. Значит, точка M равноудалена от точек B, C и P.

Что и требовалось доказать.

Аналогично доказывается, что MQ = BM = CM = PM.

Глава II. Решение некоторых прототипов задания 16 профильного ЕГЭ различными способами

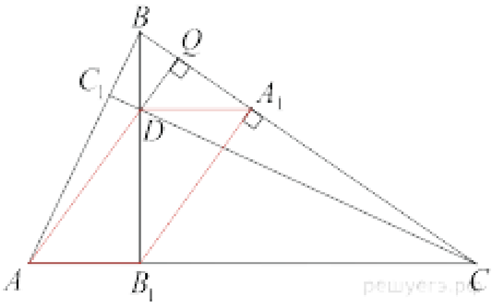
Рассмотрим решения некоторых прототипов 16 задания с использованием теорем Менелая и Чевы и леммы о трезубце, а также решения этих же заданий, но иными способами.

1. На сторонах AB, BC и AC треугольника ABC отмечены точки C_1, A_1 и B1 соответственно, причём $AC_1:C_1B = 8:3$, $BA_1:A_1C = 1:2$, $CB_1:B_1A = 3:1$.

Отрезки BB_1 и CC_1 пересекаются в точке D.

а) Докажите, что ADA_1B_1 – параллелограмм.

б) Найдите CD, если отрезки AD и BC перпендикулярны, $AC = 28$, $BC = 18$.



Решение.

а) По теореме Менелая $\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BD}{DB_1} \cdot \frac{B_1C}{CA} = 1$,

откуда $\frac{BD}{DB_1} = \frac{1}{2}$. Имеем: $\frac{BD}{BB_1} = \frac{BA_1}{BC} = \frac{1}{3}$, следовательно, треугольники DBA_1 и B_1BC подобны по второму признаку, откуда $DA_1 \parallel B_1C$ и $DA_1 = \frac{B_1C}{3}$.

Но по условию $AB_1 = \frac{B_1C}{3}$, поэтому отрезки DA_1 и AB_1 равны и параллельны, а значит, ADA_1B_1 – параллелограмм по признаку параллелограмма.

б) Пусть Q – точка пересечения прямых AD и BC. По теореме Чевы $\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BQ}{QC}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=1$, откуда $\frac{BQ}{QC}=\frac{1}{8}$, а тогда $QC=16$. по теореме Пифагора в треугольнике AQC имеем: $AQ=\sqrt{28^2-16^2}=\sqrt{528}$.

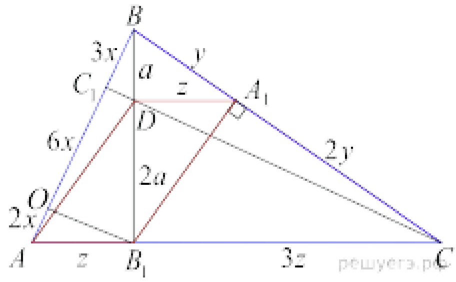
$$\frac{QD}{DA}\cdot\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BC}{CQ}=1.$$

По теореме Менелая

Следовательно, $\frac{QD}{DA}=\frac{1}{3}$. Тогда $QD=\frac{AQ}{4}=\frac{\sqrt{528}}{4}=\sqrt{33}$. и по теореме Пифагора для треугольника DQC находим $CD=\sqrt{33+256}=17$.

Ответ: б) 17.

Приведём другое решение.



а) Пусть точка О, лежащая на стороне AB такова, что отрезок B_1O параллелен CC_1. Тогда по обобщенной теореме Фалеса, примененной к отрезкам AB_1, B_1C и параллельным прямым B_1O и CC_1, получаем: $\frac{AO}{OC_1}=\frac{AB_1}{B_1C}=\frac{1}{3}$. Пусть $AC_1=8x$, $C_1B=3x$, тогда из полученного соотношения находим, что $AO=2x$, $OC_1=6x$. Снова применим обобщенную теорему Фалеса — для отрезков BC_1, C_1O и параллельных прямых C_1D, OB_1. Получим: $\frac{BD}{DB_1}=\frac{BC_1}{C_1O}=\frac{3x}{6x}=\frac{1}{2}$. Значит, точка D делит отрезок BB_1 так же, как точка A_1 делит BC. По теореме, обратной обобщенной теореме Фалеса, из этого следует параллельность прямых DA_1 и B_1C, а также подобие треугольников BDA_1 и BB_1C.

Пусть $B_1C = 3z$, тогда в силу подобия $DA_1 = \frac{1}{3}B_1C = z$. Но по условию $AB_1 = z$, следовательно, $DA_1 = AB_1$. Тем самым противоположные стороны DA_1 и AB_1 четырехугольника ADA_1B_1 не только параллельны, но и равны. Таким образом, этот четырехугольник – параллелограмм.

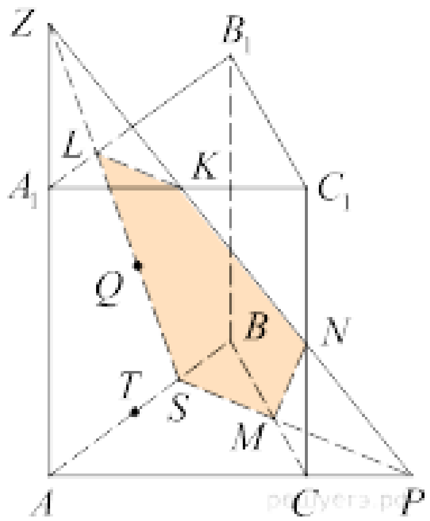
б) Из условия получаем, что $AB_1 = 7,\ A_1C = 12$. Четырехугольник ADA_1B_1 — параллелограмм, поэтому $DA_1 = AB_1 = 7$. По теореме Фалеса для отрезков AB_1, B_1C и параллельных прямых AQ и B_1A_1 получаем: $\frac{QA_1}{A_1C} = \frac{AB_1}{B_1C} = \frac{1}{3}$, откуда $QA_1 = 4$. По теореме Пифагора в прямоугольном

треугольнике DQA_1 находим $DQ = \sqrt{49-16} = \sqrt{33}$, $CD = \sqrt{33+256} = 17$.

2. Дана правильная треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$, в которой сторона основания $AB = 8$, боковое ребро $AA_1 = 2\sqrt{2}$. Точка Q – точка пересечения диагоналей грани ABB_1A_1, точки M, N и K – середины BC, CC_1 и A_1C_1 соответственно.

а) Докажите, что точки Q, M, N и K лежат в одной плоскости.

б) Найдите площадь сечения QMN.



Решение:

а) Пусть точка T – середина ребра AB. Отметим сразу, что прямые QT и AB перпендикулярны, причем $QT = \frac{1}{2}AA_1,\ TM = \frac{1}{2}AC.$ Заметим, что

$$\overrightarrow{KN} = \overrightarrow{KC_1} + \overrightarrow{C_1N} = \frac{1}{2}\overrightarrow{A_1C_1} + \frac{1}{2}\overrightarrow{C_1C} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{A_1A} = \overrightarrow{TM} + \overrightarrow{QT} = \overrightarrow{QM}.$$

Таким образом, прямые KN и QM параллельны, а значит, они лежат в одной плоскости.

б) Построим сечение QMN. Продлим KN до пересечения с продолжением AC в точке P, тогда треугольники $KC1N$ и PCN равны по катету и острому углу, откуда

$$PC = KC_1 = \frac{1}{2}AC.$$

Теперь продлим отрезок PM до пересечения с AB в точке S. По теореме Менелая для треугольника ABC и прямой SMP получим:

$$\frac{AS}{SB}\cdot\frac{BM}{MC}\cdot\frac{CP}{PA} = 1,$$

откуда $AS : SB = 3$. Далее, продлим SQ до пересечения с A_1B_1 в точке L. Эта точка симметрична S относительно Q, поэтому $A_1L : LB_1 = 1 : 3$. Пятиугольник $LKNMS$ – искомое сечение. Найдем его площадь.

Продлим SL и PK до пересечения в точке Z, лежащей на AA_1 . Тогда $SLKNMS = \mathrm{SSZP} - SMNP - SLZK$. Заметим, что $d(S,\ AC) = \frac{3}{4}d(B,\ AC) = \frac{3}{2}d(M,\ AC),$ откуда следует, что $SP : MP = 3 : 2$, то есть $SM = \frac{1}{3}SP.$ Рассмотрим треугольники $LA1K$ и SBM — они равны по двум сторонам и углу между ними, поэтому $LK = \frac{1}{3}SP.$ Кроме того LK параллельна SP, как прямые, по которым плоскость пересекает параллельные основания призмы. Тогда треугольники ZKL и ZPS подобны с коэффициентом 3. Таким образом, $ZK = \frac{1}{3}ZP,\ KN = NP$ потому $ZK = \mathrm{KN}$. Аналогично $ZL = \mathrm{LQ} = \mathrm{QS}$ и треугольники ZPS и QMS подобны по трем сторонам с коэффициентом 3 –в пункте а) уже было доказано, что $QM = \mathrm{KN}$.

Имеем:

$$S_{SZP} - S_{MNP} - S_{LZK} = S_{SZP} - \frac{1}{9}S_{SZP} - \frac{PN}{PZ}\cdot\frac{PM}{PS}S_{SZP} =$$

$$= S_{SZP}\left(1 - \frac{1}{9} - \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3}S_{SZP} = 6S_{QMS}.$$

Найдем площадь треугольника *QMS*. Вычислим для этого треугольника стороны:

$$QM = KN = \sqrt{KC_1^2 + C_1N^2} = \frac{1}{2}\sqrt{A_1C_1^2 + C_1C^2} = \frac{1}{2}\sqrt{72} = 3\sqrt{2},$$

$$QS = \sqrt{QT^2 + TS^2} = \frac{1}{2}\sqrt{AA_1^2 + TB^2} = \frac{1}{2}\sqrt{24} = \sqrt{6},$$

$$SM = \frac{1}{2}TC = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{32\cdot 8} = 2\sqrt{3}.$$

Отсюда видно, что $18 = QM^2 = QS^2 + SM^2 = 6 + 12$, таким образом, треугольник *MSQ* прямоугольный. Найдем его площадь:

$$\frac{1}{2}\cdot\sqrt{6}\cdot 2\sqrt{3} = 3\sqrt{2}.$$

Таким образом,

$$S_{LKNMS} = 6\cdot 3\sqrt{2} = 18\sqrt{2}.$$

Ответ: б) $18\sqrt{2}$.

Примечание.

Треугольник *MSQ* всегда прямоугольный, поскольку прямые *SM* и *TC* параллельны, а прямая *TC* и плоскость A_1B_1BA перпендикулярны. Поэтому прямые *TC* и *QS* перпендикулярны, и прямые *SM* и *QS* тоже перпендикулярны.

Приведём другое решение.

а) Отрезок *KN* —средняя линия треугольника A_1C_1C, следовательно, $KN \parallel A_1C$. Отрезок *QM* —средняя линия треугольника A_1BC, следовательно, $QM \parallel A_1C$.

Тогда $KN \parallel QM$, следовательно, они лежат в одной плоскости.

б) Пусть *T* — середина *AB*, T_1 — середина A_1B_1. Заметим, что точка *Q* — середина TT_1, следовательно, $TQ = \frac{TT_1}{2} = CN$, тогда *TQNC* — прямоугольник, и $QN \parallel TC$, $QN = TC$, *QN* параллельна основаниям призмы.

Пусть плоскость сечения α пересекает плоскость AA_1B_1 по прямой *LS*, где L — точка пересечения плоскости α и ребра $A1B1$, S — точка пересечения плоскости α и ребра AB.

Плоскость α проходит через прямую QN, параллельную основаниям призмы, следовательно, она пересекает основания призмы по прямым, параллельным QN. Тогда $LK \parallel QN \parallel C_1T_1$, LK - средняя линия треугольника $A_1C_1T_1$, $LK = \frac{C_1T_1}{2} = \frac{QN}{2}$.

Заметим, что $LK \perp A_1T_1$, $LK \perp A_1A$, следовательно, LK перпендикулярна плоскости A_1B_1B, а значит, и прямой LS.

Аналогично $MS \parallel QN \parallel TC$, $MS = \frac{CT}{2} = \frac{QN}{2}$, MS перпендикулярна прямой LS.

Таким образом, $QLKN$ и $QNMS$ — прямоугольные трапеции.

$$QN = TC = 4\sqrt{3},\ MS = LK = \frac{T_1C_1}{2} = 2\sqrt{3},\ QS =$$

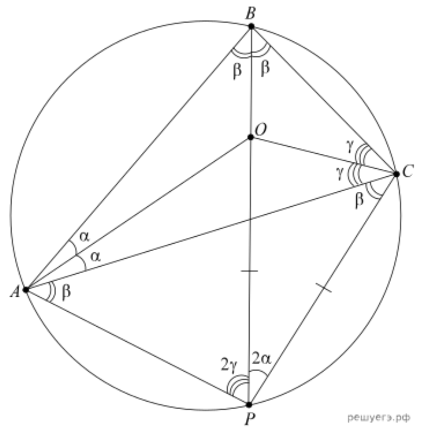
$$= LQ = \sqrt{LT_1^2 + T_1Q^2} = \sqrt{\left(\frac{A_1T_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{AA_1}{2}\right)^2} = \sqrt{6}.$$

$$S_{KNMSL} = S_{QLKN} + S_{QSMN} = 2S_{QLKN} = 2 \cdot \frac{2\sqrt{3} + 4\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{6} = 18\sqrt{2}.$$

3. Около ΔABC описана окружность. Прямая BO, где O — центр вписанной окружности, вторично пересекает описанную окружность в точке P.

а) Докажите, что OP=AP.

б) Найдите расстояние от точки P до прямой AC, если радиус описанной окружности равен 18. $OP = AP.\ \angle ABC = 120^\circ,$



Решение.

а) Обозначим углы треугольника ABC $\angle A = 2\alpha,\ \angle B = 2\beta,\ \angle C = 2\gamma.$

Заметим, что $2\alpha + 2\beta + 2\gamma = 180^\circ.$ $\angle BPA = \angle ACB = 2\gamma,$ как вписанные углы, опирающиеся на одну дугу. Аналогично $\angle CAP = \angle CBP = \beta.$ Тогда $\angle AOP = 180^\circ - \alpha - \beta - 2\gamma = \alpha + \beta.$ Но $\alpha + \beta = \angle OAP,$ следовательно, треугольник *AOP* — равнобедренный, а тогда $AP = OP.$

б) Сумма противоположных углов вписанного четырехугольника равна 180°, следовательно, $\angle APC = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ,$ $AP = PC,$ как хорды, стягивающие равные дуги. Следовательно, треугольник *APC* — равносторонний. Искомое расстояние *d* равно его высоте: $d = \frac{\sqrt{3}AC}{2}.$

По теореме синусов,

$$AC = 2R\sin\widehat{ABC} = 36 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 18\sqrt{3}.$$

Следовательно, $d = \dfrac{\sqrt{3} \cdot 18\sqrt{3}}{2} = 27.$

Ответ: б) 27.

Глава III. Исследовательский этап.

Для подтверждения выдвинутой гипотезы было проведено исследование, в котором приняли участие обучающиеся 11 класса Черемшанской СОШ №20. Исследовательская часть состояла из двух этапов:

1. На первом этапе была выделена группа учащихся 11 класса, готовящихся сдавать ЕГЭ по математике профильного уровня. И им были предложены задачи, разобранные во второй части данной работы, которые необходимо было решить любым известным обучающимся способом. На решение было выделено два урока.

2. На втором этапе, ту же группу обучающихся познакомили с теоремами Чевы и Менелая, леммой о трезубце, разобрали примеры решения задач при помощи этих теорем и предложили решить те же задачи из второй главы с применением полученных знаний. На это также было отведено два урока.

Данные по количеству решенных задач в первом и втором случае были сведены в таблицу 1 и таблицу 2 соответственно:

Таблица 1. «Решение задач стандартным способом».

Фамилия участника исследования.	Количество решенных задач			
	Задача №1	Задача №2	Задача №3	Итог
Зверев Д.	-	-	-	0
Кохановская О.	+	+/-	+/-	3
Малюченко Н.	-	-	+	1
Ишимов Е.	+	-	-	1
Куружиу А.	+	-	+/-	2
Куружиу К.	+	-	+	2
Волчек К.	-	-	-	0

Таблица 2. «Решение задач с использованием теоремы Менелая, теоремы Чевы и леммы о трезубце».

Фамилия участника исследования.	Количество решенных задач			
	Задача №1	Задача №2	Задача №3	Итог
Зверев Д.	+	-	+	2
Кохановская О.	+	+	+	3
Малюченко Н.	+	-	+	2
Ишимов Е.	+	+	+	3
Куружиу А.	-	+	+	2
Куружиу К.	+	+	+	3
Волчек К.	+	-	-	1

Количественные результаты решения заданий (в %) разными способами для наглядности показаны на диаграмме 1.

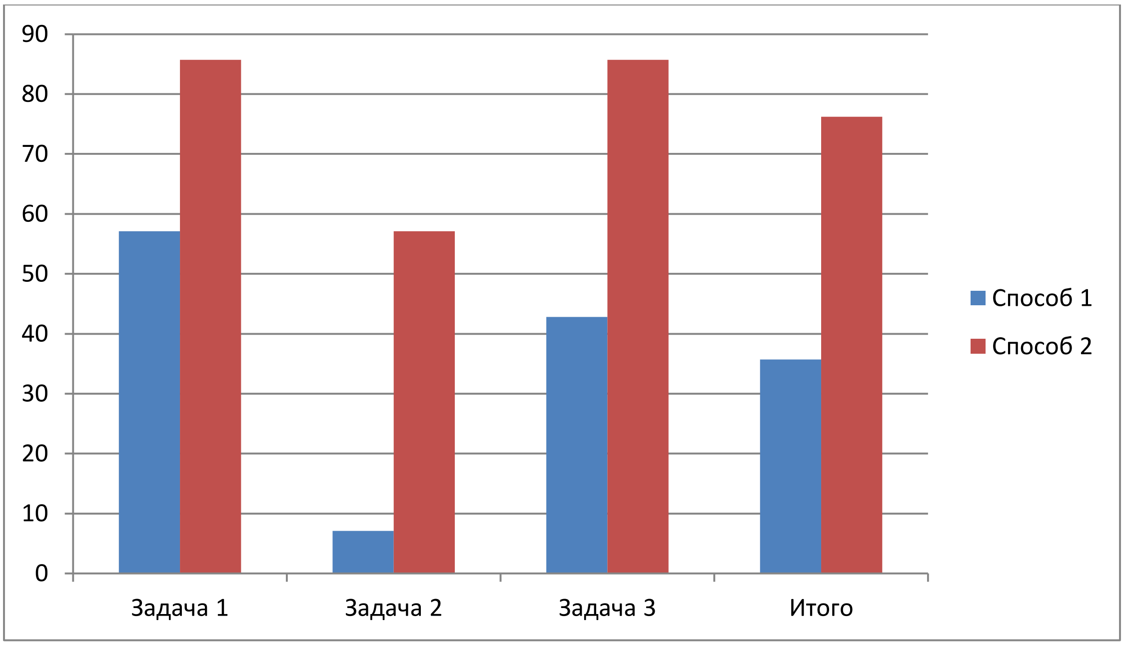


Диаграмма 1. Количество заданий (в%), решенных разными способами участниками эксперимента

Можно увидеть, что количество заданий, решенных с использованием теоремы Чевы, теоремы Менелая и леммы о трезубце выросло в два раза по сравнению с вариантом использования стандартных методов.

Время, затраченное участниками эксперимента на решение предложенных заданий, было сведено в таблицу 3.

Таблица 3. Время, затраченное на решение задач стандартным способом и с использованием предложенных теорем

ФИО	Время (в мин.). Стандартный способ/ Применение предложенных теорем			
	Задача №1	Задача №2	Задача №3	Итог
Зверев Д.	-/35 мин	-/-	-/38 мин	90/90 мин
Кохановская О.	25/22 мин	30/30 мин	24/21мин	79/73 мин
Малюченко Н.	-/36 мин	-/-	30/29 мин	90/90 мин
Ишимов Е.	29/25 мин	-/31 мин	-/31 мин	90/87 мин
Куружиу А.	36/- мин	-/30 мин	35/30 мин	90/90 мин
Куружиу К.	34/29 мин	-/31 мин	32/28 мин	90/88 мин
Волчек К.	-/35 мин	-/- минут	-/- минут	90/90 мин

Время, затраченное учащимися на выполнение предложенных заданий различными способами, для наглядности представлено на диаграмме 2. В ней использованы данные только тех, кто сумел решить задания двумя способами. Но также стоит отметить, что при использовании теоремы Чевы, теоремы Менелая и леммы о трезубце увеличилось число обучающихся полностью справившихся с заданием, причем раньше срока.

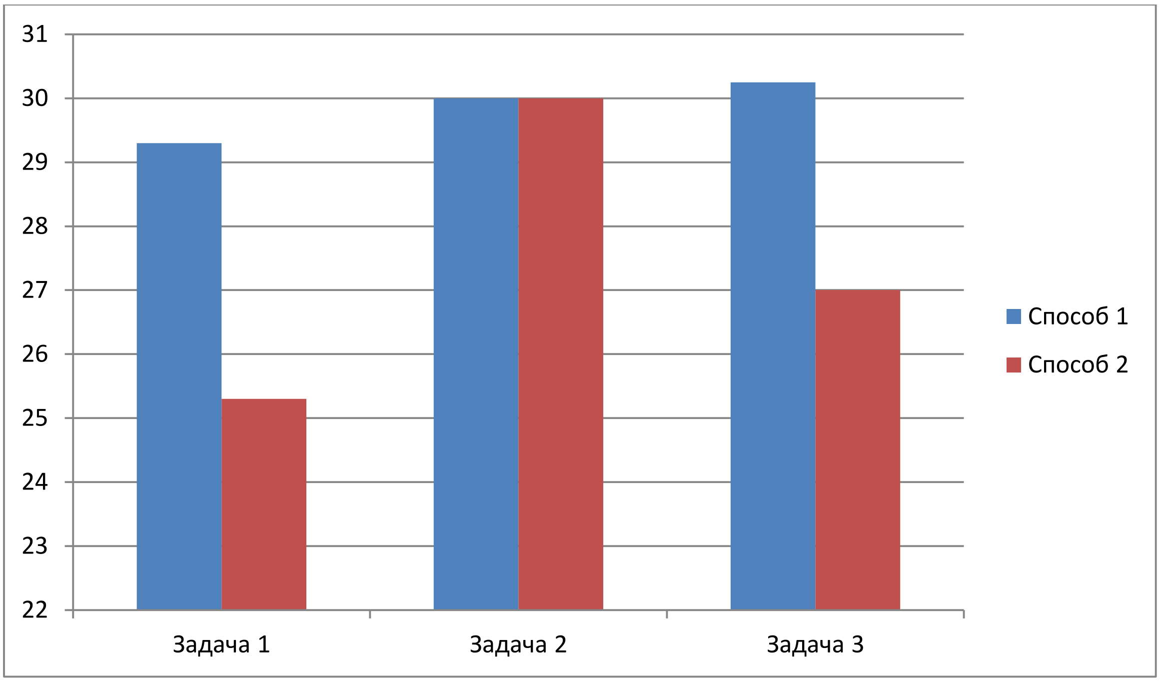


Диаграмма 2. Время, затраченное на решение задач стандартным способом и с применением теоремы Чевы, теоремы Менелая и леммы о трезубце.

Диаграмма показывает, что применение вышеназванных теорем позволило существенно сократить среднее время, затрачиваемое учащимися на решение предложенных прототипов 13 и 16 заданий профильного ЕГЭ.

Полученные данные позволяют сделать вывод, что знакомство с теоремами Чевы, Менелая и леммы о трезубце, упрощает решение некоторых прототипов 13 и 16 заданий профильного ЕГЭ по математике, что подтверждает нашу гипотезу.

Кроме того, нами был проведен опрос среди участников экперимента, им было предложено ответить на два вопроса:

1. Какое решение на ваш взгляд проще: без применения теоремы Чевы, Менелая и леммы о трезубце или же с их использованием? (с использованием этих теорем / без использования этих теорем, одинаково)

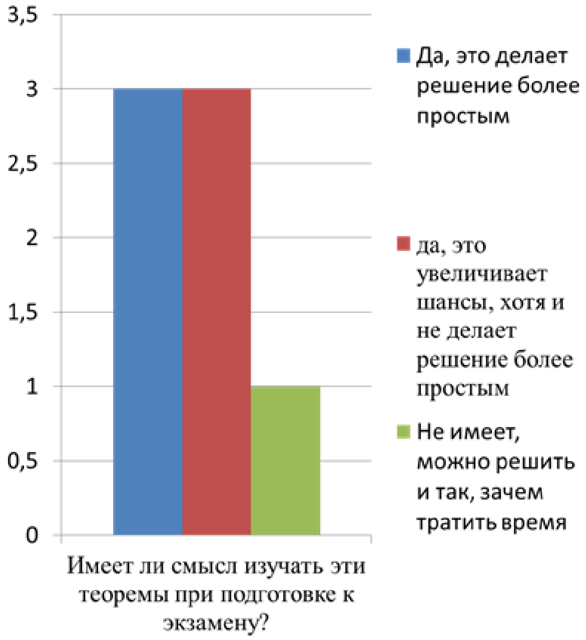
2. Имеет ли на ваш взгляд смысл изучать эти теоремы при подготовке к ЕГЭ профильного уровня? (да, имеет, так как делает решение этих прототипов более простым / знание этих теорем не всегда упрощает решение, но увеличивает шансы на решение этих задач на экзамене, поэтому все же имеет смысл / нет, не имеет, так как на отработку этих теорем требуется время, а эти задания можно решить и обычным способом)

Ответы были сведены в таблицу 4:

Таблица 4. Результаты опроса участников эксперимента о необходимости использования теоремы Чевы, теоремы Менелая и леммы о трезубце

Вопрос	С использованием этих теорем	Без использования этих теорем	Одинаково
Какое решение на ваш взгляд проще: без применения теоремы Чевы, Менелая и леммы о трезубце или же с их использованием?	5	1	1
	да, имеет, так как делает решение этих прототипов более простым	знание этих теорем не всегда упрощает решение, но увеличивает шансы на решение этих задач на экзамене, поэтому все же имеет смысл	нет, не имеет, так как на отработку этих теорем требуется время, а эти задания можно решить и обычным способом
Имеет ли на ваш взгляд смысл изучать эти теоремы при подготовке к ЕГЭ профильного уровня?	3	3	1

На основании данной таблицы были построены диаграммы с итогами опроса участников эксперимента:



Из данных диаграмм видно, что большинство участников подтвердили пользу изучения теоремы Чевы, теоремы Менелая и леммы о трезубце при решении 13 и 16 заданий ЕГЭ по математике профильного уровня. Это также доказывает актуальность нашей работы.

Выводы

Проанализировав результаты проведенного исследования, можно сделать следующие выводы:

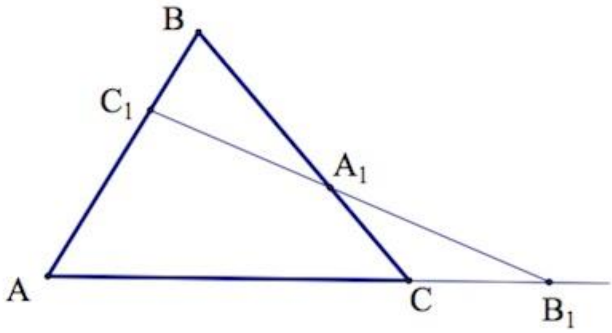
1. Изучив теорему Чевы, теорему Менелая и лемму о трезубце, рассмотрев их доказательство, сделали вывод о том, что данные теоремы действительно могут пригодиться при подготовке к ЕГЭ по математике профильного уровня
2. Рассмотрев решение прототипов 13 и 16 заданий разными способами, поняли, что решение при помощи данных теорем и леммы менее трудоемко по степени мыслительной деятельности. Так как решение происходит через применение формул, которые необходимо просто запомнить.
3. Проведя эксперимент по самостоятельному решению предложенных прототипов 13 и 16 задания среди учащихся 11 класса, мы сделали вывод о временных затратах на выполнение данных заданий разными способами и доказали, что применение данных теорем экономит время на экзамене.
4. По результатам исследования было составлено мини-пособие по применению теоремы Чевы, теоремы Менелая и леммы о трезубце для решения некоторых прототипов 13 и 16 заданий профильного ЕГЭ по математике.
5. Результаты опроса участников эксперимента подтверждают актуальность этой работы для сдающих ЕГЭ по математике профильного уровня.

Данное исследование может быть продолжено и для других заданий второй части профильного ЕГЭ по математике.

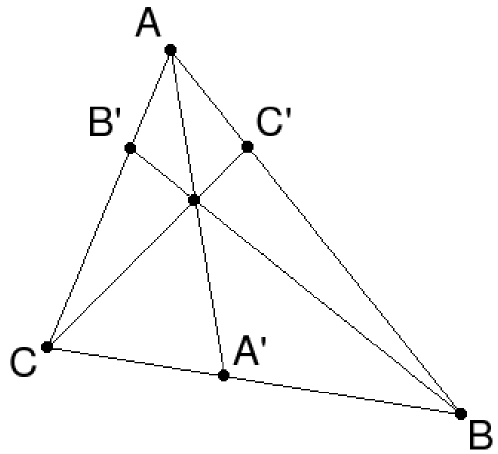
Мини-пособие по использованию теоремы Чевы, теоремы Менелая, леммы о трезубце при решении 13 и 16 задания профильного ЕГЭ по математике

Теорема Менелая: Если точки A_1, B_1 и C_1 лежат соответственно на прямых BC, CA и AB треугольника или на их продолжениях, то они лежат на одной прямой, тогда и только тогда, когда

$$\frac{AC1}{C1B} * \frac{BA1}{A1C} * \frac{CB1}{B1A} = 1$$

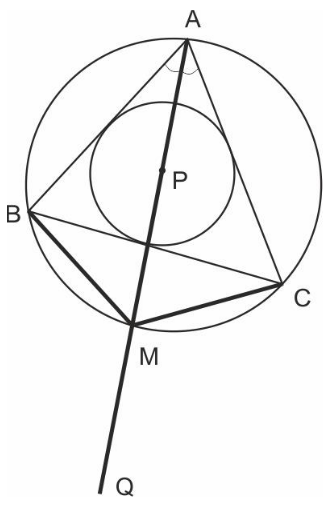


Теорема Чевы: Любые произвольные отрезки, выходящие из вершин треугольника, но с одним условием: они должны пересекаться в одной точке, делят противолежащие этим вершинам стороны таким образом, что истинно равенство:



$$\frac{AC1}{C1B} * \frac{BA1}{A1C} * \frac{CB1}{B1A} = 1$$

Лемма о трезубце: Пусть P – центр вписанной окружности треугольника ABC, Q – центр его вневписанной окружности, касающейся стороны BC. Точка пересечения биссектрисы угла A треугольника ABC с его описанной окружностью равноудалена от точек B, C, P, Q. Эта схема называется также теоремой о трилистнике.



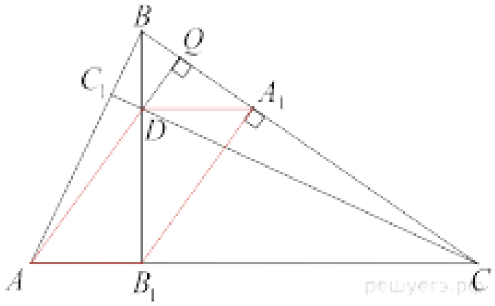
Примеры решения 13 и 16 заданий профильного ЕГЭ при помощи теоремы Чевы, теоремы Менелая и леммы о трезубце

задача 1. На сторонах AB, BC и AC треугольника ABC отмечены точки C_1, A_1 и B1 соответственно, причём $AC_1:C_1B = 8:3$, $BA_1:A_1C = 1:2$, $CB_1:B_1A = 3:1$.

Отрезки BB_1 и CC_1 пересекаются в точке D.

а) Докажите, что ADA_1B_1 – параллелограмм.

б) Найдите CD, если отрезки AD и BC перпендикулярны, $AC = 28$, $BC = 18$.



Решение.

а) По теореме Менелая $\dfrac{AC_1}{C_1B} \cdot \dfrac{BD}{DB_1} \cdot \dfrac{B_1C}{CA} = 1,$

откуда $\dfrac{BD}{DB_1} = \dfrac{1}{2}$. Имеем: $\dfrac{BD}{BB_1} = \dfrac{BA_1}{BC} = \dfrac{1}{3}$, следовательно, треугольники DBA_1 и B_1BC подобны по второму признаку, откуда $DA_1 \parallel B_1C$ и $DA_1 = \dfrac{B_1C}{3}$.

Но по условию $AB_1 = \dfrac{B_1C}{3}$, поэтому отрезки DA_1 и AB_1 равны и параллельны, а значит, ADA_1B_1 – параллелограмм по признаку параллелограмма.

б) Пусть Q – точка пересечения прямых AD и BC. По теореме Чевы $\dfrac{AC_1}{C_1B} \cdot \dfrac{BQ}{QC} \cdot \dfrac{CB_1}{B_1A} = 1$, откуда $\dfrac{BQ}{QC} = \dfrac{1}{8}$, а тогда $QC = 16$. по теореме Пифагора в треугольнике AQC имеем: $AQ = \sqrt{28^2 - 16^2} = \sqrt{528}$.

По теореме Менелая

$$\frac{QD}{DA} \cdot \frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BC}{CQ} = 1.$$

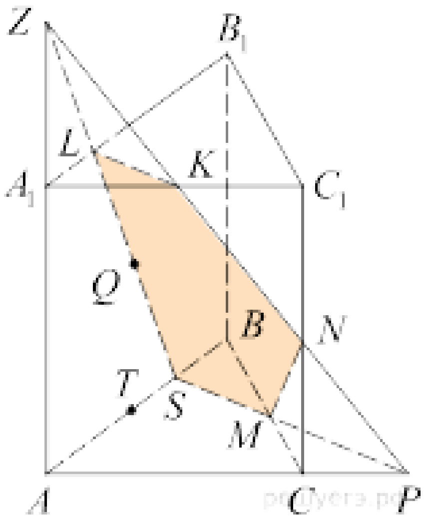
Следовательно, $\frac{QD}{DA} = \frac{1}{3}$. Тогда $QD = \frac{AQ}{4} = \frac{\sqrt{528}}{4} = \sqrt{33}$, и по теореме Пифагора для треугольника DQC находим $CD = \sqrt{33 + 256} = 17$.

Ответ: б) 17.

задача 2. Дана правильная треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$, в которой сторона основания $AB = 8$, боковое ребро $AA_1 = 2\sqrt{2}$. Точка Q – точка пересечения диагоналей грани ABB_1A_1, точки M, N и K – середины BC, CC_1 и A_1C_1 соответственно.

а) Докажите, что точки Q, M, N и K лежат в одной плоскости.

б) Найдите площадь сечения QMN.



Решение:

а) Пусть точка T – середина ребра AB. Отметим сразу, что прямые QT и AB перпендикулярны, причем $QT = \frac{1}{2}AA_1$, $TM = \frac{1}{2}AC$. Заметим, что

$$\overrightarrow{KN} = \overrightarrow{KC_1} + \overrightarrow{C_1N} = \frac{1}{2}\overrightarrow{A_1C_1} + \frac{1}{2}\overrightarrow{C_1C} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{A_1A} = \overrightarrow{TM} + \overrightarrow{QT} = \overrightarrow{QM}.$$ 25

Таким образом, прямые KN и QM параллельны, а значит, они лежат в одной плоскости.

б) Построим сечение QMN. Продлим KN до пересечения с продолжением AC в точке P, тогда треугольники $KC1N$ и PCN равны по катету и острому углу, откуда

$$PC = KC_1 = \frac{1}{2}AC.$$

Теперь продлим отрезок *PM* до пересечения с *AB* в точке *S*. По теореме Менелая для треугольника *ABC* и прямой *SMP* получим:

$$\frac{AS}{SB}\cdot\frac{BM}{MC}\cdot\frac{CP}{PA} = 1,$$

откуда $AS : SB = 3$. Далее, продлим *SQ* до пересечения с A_1B_1 в точке *L*. Эта точка симметрична *S* относительно *Q*, поэтому $A_1L : LB_1 = 1 : 3$. Пятиугольник *LKNMS* – искомое сечение. Найдем его площадь.

Продлим *SL* и *PK* до пересечения в точке *Z*, лежащей на AA_1 . Тогда $SLKNMS = \mathrm{SSZP} - SMNP - SLZK$. Заметим, что $d(S,\ AC) = \frac{3}{4}d(B,\ AC) = \frac{3}{2}d(M,\ AC),$ откуда следует, что $SP : MP = 3 : 2$, то есть $SM = \frac{1}{3}SP.$ Рассмотрим треугольники $LA1K$ и SBM — они равны по двум сторонам и углу между ними, поэтому $LK = \frac{1}{3}SP.$ Кроме того *LK* параллельна *SP*, как прямые, по которым плоскость пересекает параллельные основания призмы. Тогда треугольники *ZKL* и *ZPS* подобны с коэффициентом 3. Таким образом, $ZK = \frac{1}{3}ZP,\ KN = NP$ потому $ZK = \mathrm{KN}$. Аналогично $ZL = \mathrm{LQ} = \mathrm{QS}$ и треугольники *ZPS* и *QMS* подобны по трем сторонам с коэффициентом 3 –в пункте а) уже было доказано, что $QM = \mathrm{KN}$.

Имеем:

$$S_{SZP} - S_{MNP} - S_{LZK} = S_{SZP} - \frac{1}{9}S_{SZP} - \frac{PN}{PZ}\cdot\frac{PM}{PS}S_{SZP} =$$

$$= S_{SZP}\left(1 - \frac{1}{9} - \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3}S_{SZP} = 6S_{QMS}.$$

Найдем площадь треугольника *QMS*. Вычислим для этого треугольника стороны:

$$QM = KN = \sqrt{KC_1^2 + C_1N^2} = \frac{1}{2}\sqrt{A_1C_1^2 + C_1C^2} = \frac{1}{2}\sqrt{72} = 3\sqrt{2},$$

$$QS = \sqrt{QT^2 + TS^2} = \frac{1}{2}\sqrt{AA_1^2 + TB^2} = \frac{1}{2}\sqrt{24} = \sqrt{6},$$

$$SM = \frac{1}{2}TC = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{32\cdot 8} = 2\sqrt{3}.$$

Отсюда видно, что $18 = QM^2 = QS^2 + SM^2 = 6 + 12$, таким образом, треугольник *MSQ* прямоугольный. Найдем его площадь:

$$\frac{1}{2} \cdot \sqrt{6} \cdot 2\sqrt{3} = 3\sqrt{2}.$$

Таким образом,

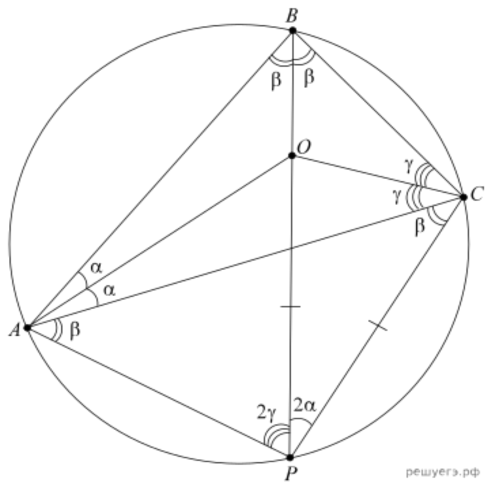
$$S_{LKNMS} = 6 \cdot 3\sqrt{2} = 18\sqrt{2}.$$

Ответ: б) $18\sqrt{2}.$

задача 3. Около ΔABC описана окружность. Прямая *BO*, где *O* — центр вписанной окружности, вторично пересекает описанную окружность в точке *P*.

а) Докажите, что OP=AP.

б) Найдите расстояние от точки *P* до прямой *AC*, если $\angle ABC = 120^\circ$, радиус $OP = AP.$ описанной окружности равен 18.



Решение.

а) Обозначим углы треугольника ABC $\angle A = 2\alpha, \angle B = 2\beta, \angle C = 2\gamma.$ Заметим, что $2\alpha + 2\beta + 2\gamma = 180^\circ.$ $\angle BPA = \angle ACB = 2\gamma,$ как вписанные углы, опирающиеся на одну дугу. Аналогично $\angle CAP = \angle CBP = \beta.$ Тогда $\angle AOP = 180^\circ - \alpha - \beta - 2\gamma = \alpha + \beta.$ Но $\alpha + \beta = \angle OAP,$ следовательно, треугольник *AOP* — равнобедренный, а тогда $AP = OP.$

б) Сумма противоположных углов вписанного четырехугольника равна 180º, следовательно, $\angle APC = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$, $AP = PC$, как хорды, стягивающие равные дуги. Следовательно, треугольник APC — равносторонний. Искомое расстояние d равно его высоте: $d = \frac{\sqrt{3}AC}{2}$.

По теореме синусов,

$$AC = 2R\sin\widehat{ABC} = 36\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 18\sqrt{3}.$$

Следовательно, $d = \frac{\sqrt{3}\cdot 18\sqrt{3}}{2} = 27.$

Ответ: б) 27.

Список использованной литературы:

1. А.Г. Мерзляк, В.Б. Полонский, М.С. Якир - Геометрия 8 класс, Учебник, «Вентана-Граф», 2013 г.

2. Лемма о трезубце (трилистнике) // [Электронный ресурс] – Режим доступа URL: https://ege-study.ru/materialy-ege/lemma-o-trezubce-trilistnike/

3. Теорема Чевы и Менелая - доказательство, формулы, примеры // [Электронный ресурс] – Режим доступа URL: https://nauka.club/matematika/geometriya/teorema-chevy-i-menelaya.html

4. СДАМ ГИА: РЕШУ ЕГЭ (Образовательный портал для подготовки к экзаменам) // [Электронный ресурс] – Режим доступа URL: https://math-ege.sdamgia.ru/

5. Открытый банк заданий ЕГЭ Федерального института педагогических измерений // [Электронный ресурс]- Режим доступа URL: https://fipi.ru/ege/otkrytyy-bank-zadaniy-ege#!/tab/173765699-2